

# Formelsammlung Tarif Lebensversicherung

Reinhold Kainhofer (reinhold@kainhofer.com)

24. April 2016

Bemerkung: Sämtliche Barwerte werden rekursiv bestimmt, daher werden alle Formeln in ihrer rekursiven Form angegeben. Teilweise wird aus informativen Gründen davor die entsprechende Summenformel angegeben, diese wird jedoch nicht zur tatsächlichen Berechnung benutzt.

## 1 Vertrags- und Tarifiedetails

### 1.1 Tarifiedetails (identisch für alle Verträge)

$i$	Rechnungszins
$v$	Diskontierungsfaktor $v = \frac{1}{1+i}$
	Leistungszahlungsweise (vorschüssig, nachschüssig)
$k_{Ausz}$	unterjährige Auszahlung der Erlebensleistungen
$O(k)$	Ordnung der Unterjährigkeitsrechnung (1./2. Ordnung)
$RG$	Prämienrückgewähr bei Ableben während Aufschub
$PS$	Prämiensumme
$\rho$	Sicherheitszuschlag auf die Prämie
$\rho^{RG}$	Risikosumme (relativ zu DK) im Ablebensfall bei Prämienrückgewähr

### 1.2 Vertragsdetails (vertragsspezifische Werte)

$VS$	Versicherungssumme
$Beg$	Versicherungsbeginn
$J$	Geburtsjahr der 1. versicherten Person
$x$	Eintrittsalter der 1. versicherten Person
$y$	Eintrittsalter der 2. versicherten Person
$n$	Versicherungsdauer
$l$	Aufschubdauer des Versicherungsschutzes
$m$	Prämienzahlungsdauer
$k$	Prämienzahlungsweise ( $k$ -tel jährlich)
$f$	Prämienfreistellungszeitpunkt

## 2 Rechnungsgrundlagen

$q_x = q_x^{(J)}(t)$	Sterbewahrscheinlichkeit der 1. versicherten Person (geboren im Jahr $J$ ) im Beobachtungsjahr $t$
$p_x = 1 - q_x$	1-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit der 1. versicherten Person
${}_np_x = \prod_{j=1}^n p_{x+j}$	$n$ -jährige Überlebenswahrscheinlichkeit
$\omega$	Höchstalter
$q_y = q_y^{(J+x-y)}(t)$	Sterbewahrscheinlichkeit der 2. versicherten Person (geboren im Jahr $J$ ) im Beobachtungsjahr $t$

### 3 Kosten

#### 3.1 Abschlusskosten ( $\alpha$ -Kosten) / Zillmerkosten (Z-Kosten)

- ) Einmalig (bei Vertragsabschluss)
  - an Versicherungssumme
  - an Brutto-Prämiensumme<sup>1</sup>
  - an Barwert der Versicherungsleistungen (z.B. Rentenbarwert)
- ) Laufend (während Prämienzahlungsdauer)<sup>2</sup>
  - an Bruttoprämie
  - an Brutto-Prämiensumme
- ) Laufend (über gesamte Laufzeit des Vertrags)
  - an Bruttoprämie
  - an Brutto-Prämiensumme

#### 3.2 Inkassokosten ( $\beta$ -Kosten)

- ) Laufend an Bruttoprämie während Prämienzahlungsdauer (einmalig bei Einmalerlag)

#### 3.3 Verwaltungskosten ( $\gamma$ -Kosten)

Laufend während der gesamten Laufzeit verrechnet:

- ) an Versicherungssumme (prämienpflichtig)
- ) an Versicherungssumme (planmäßig/außerplanmäßig prämienfrei)
- ) an Leistungsbarwert / Rentenbarwert (=Deckungskapital) (prämienfrei)
- ) an Prämiensumme (prämienpflichtig) (=am Rentenbarwert zu Vertragsbeginn bei sof.beg.LR mit EE)
- ) an Prämiensumme (planmäßig/außerplanmäßig prämienfrei)
- ) am Ablösekaptial während Aufschubzeit
- ) an jeder Erlebenszahlung/Rente (während Liquiditätsphase)
- ) am Deckungskapital

#### 3.4 Stückkosten $StkK$

- ) Stückkosten (Absolutbetrag)  $StkK$  pro Jahr während Prämienzahlungsdauer (bzw. einmalig bei Einmalprämie)

#### 3.5 Übersicht

Die häufigsten Kostentypen sind **markiert**.

Typ	Dauer	an VS	an PS	an JBP <sup>3</sup>	
Abschluss $\alpha$	einmalig	$\alpha^{VS,once}$			
	Prämiendauer			$\alpha^{BP,PrD}$	
	Prämienfrei		$\alpha^{PS,LZ4}$	$\alpha^{BP,LZ}$	
	Vertragsdauer				
Zillmer $z$	einmalig	$z^{VS,once}$	$z^{PS,once}$		
	Prämiendauer				
	Prämienfrei		$z^{PS,LZ}$		
	Vertragsdauer				
Inkasso $\beta$	einmalig			$\beta^{BP,PrD}$	
	Prämiendauer				
	Prämienfrei				
	Vertragsdauer				
Verwaltung $\gamma$	einmalig				
	Prämiendauer	$\gamma^{VS,PrD}$	$\gamma^{PS,PrD}$		

<sup>1</sup>Entspricht Einmalprämie bei Einmalerlag

<sup>2</sup>Bei Einmalerlag sind einmalige  $\alpha$ -Kosten und laufende  $\alpha$ -Kosten auf die Prämie während der Prämienzahlungsdauer ident.

<sup>3</sup>während der gesamten Prämienzahlungsdauer

<sup>4</sup>evt. mit jährlicher faktorieller Aufwertung, evt. mit Obergrenze)

	Prämienfrei Vertragsdauer	$\gamma^{VS,fr}$ $\gamma^{VS,LZ}$	$\gamma^{PS,LZ}$		$\gamma^{BP,Erl}$ (an ErlZ)
Verwaltung $\tilde{\gamma}$ (außerplanm. prämienfrei)	einmalig Prämiendauer Prämienfrei Vertragsdauer				
		$\tilde{\gamma}^{VS,LZ}$			

### 3.6 Kosten-Cashflows

Jede Kostenart ( $\alpha$ /Zillmer/ $\beta$ / $\gamma$ / $\tilde{\gamma}$ ) und Bemessungsgrundlage (VS/PS/JBP) erzeugt aus den verschiedenen Kostendauern einen Cash-Flow-Vektor in folgender Art, der diskontiert den gesamten Kostenbarwert der jeweiligen Kostenart und Bmgl. liefert:

$$X_t^{Bmgl} = \begin{cases} X^{Bmgl,once} + X^{Bmgl,PrD} + X^{Bmgl,LZ} & \text{für } t = 0 \\ X^{Bmgl,PrD} + X^{Bmgl,LZ} & \text{für } 0 < t \leq m \\ X^{Bmgl,fr} + X^{Bmgl,LZ} & \text{für } m < t \leq n \end{cases}$$

## 4 Cashflows

	Beschreibung	LR	ALV	ELV
$pr_t \dots$	Prämienzahlungen (vorschüssig) zu $t$	$\delta(t < m)$	$\delta(t < m)$	$\delta(t < m)$
$PS$	Prämiensumme, $PS = \sum_{t=0}^n pr_t$			
$\ddot{e}_t \dots$	Erlebenszahlungen vorschüssig zu $t$	$\delta(l + g \leq t < n)$	0	$\delta(t = n)$
$e_t \dots$	Erlebenszahlungen nachschüssig zu $t + 1$	$\delta(l + g \leq t < n)$	0	$\delta(t = n)$
$\ddot{e}_t^* \dots$	garantierte Zahlungen vorschüssig zu $t$	$\delta(l \leq t < l + g)$	0	0
$e_t^* \dots$	garantierte Zahlungen nachschüssig zu $t + 1$	$\delta(l \leq t < l + g)$	0	0
$a_t \dots$	Ablebenszahlung zu $t + 1$	0	$\delta(l \leq t < n)$	0
$a_t^{(RG)}$	Ablebenszahlungen für PRG zu $t + 1$ (Ab- leben im Jahr $t$ )	$\min(t + 1, m, f)$	0	$\min(t + 1, m, f)$

Die Cash-Flows können auch in Matrixform dargestellt werden:

$$\overrightarrow{CF}_t^L = \begin{pmatrix} pr_t & \ddot{e}_t^* & \ddot{e}_t & 0 & 0 \\ pr_t^{(nachsch)} & e_t^* & e_t & a_t & a_t^{(RG)} \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CF}_t^K = \begin{pmatrix} \alpha_t^{(VS)} & \alpha_t^{(PS)} & \alpha_t^{(BP)} \\ z_t^{(VS)} & z_t^{(PS)} & - \\ - & - & \beta_t \\ \gamma_t^{(VS)} & \gamma_t^{(PS)} & - \\ \tilde{\gamma}_t^{frei} & - & - \end{pmatrix}$$

## 5 Barwerte

### 5.1 Prämienbarwert

$$\begin{aligned} P_{x:\overline{n}}(t) &= \sum_{j=t}^n pr_{t+j} \cdot v^{j-t} \cdot {}_j p_{x+t} \\ &= pr_t + v \cdot p_{x+t} \cdot P_{x:\overline{n}}(t+1) \end{aligned}$$

### 5.2 Barwert garantierter Zahlungen:

Garantierte Erlebensleistungen (wenn Aufschubzeit überlebt wurde):

$$\begin{aligned} E_{x:\overline{n}}^{Gar}(t) &= \begin{cases} {}_{l-t}p_{x+t} \cdot v^{l-t} \cdot \sum_{j=l}^n \{\ddot{e}_{j-t}^* + v \cdot e_{j-t}^*\} v^{j-t} & \text{für } t < l \text{ (Aufschubzeit)} \\ \sum_{j=t}^n \{\ddot{e}_{j-t}^* + v \cdot e_{j-t}^*\} v^{j-t} & \text{für } t \geq l \text{ (Liquiditätsphase)} \end{cases} \\ &= \ddot{e}_t^* + \{E_{x:\overline{n}}^*(t+1) + e_t^*\} \cdot v \cdot \begin{cases} 1 & \text{für } t < l \text{ (Aufschubzeit)} \\ p_{x+t} & \text{für } t \geq l \text{ (Liquiditätsphase)} \end{cases} \end{aligned}$$

### 5.3 Erlebensleistungsbarwert:

1. Person:

$$\begin{aligned} E_{x:\overline{n}}(t) &= \sum_{j=t}^n (\ddot{e}_{t+j} \cdot v^{j-t} {}_j p_{x+t} + e_{t+j} \cdot v^{j+1-t} {}_{j+1-t} p_{x+t}) \\ &= \ddot{e}_t + v \cdot p_{x+t} \cdot \{e_t + E_{x:\overline{n}}(t+1)\} \end{aligned}$$

2. Person:

$$E2_{y:\overline{n}}(t) = \ddot{e}_t + v \cdot p_{y+t} \cdot \{e_t + E2_{y:\overline{n}}(t+1)\}$$

gemeinsam:

$$E12_{x,y:\overline{n}}(t) = \ddot{e}_t + v \cdot p_{x+t} \cdot p_{y+t} \cdot \{e_t + E12_{x,y:\overline{n}}(n, t+1)\}$$

### 5.4 Unterjährige Auszahlung der Erlebenszahlungen

Analog zu (bei konstanter Rente)

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{x:\overline{n}}^{(m)} &= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_n p_x \cdot v^n \cdot \ddot{a}_{x+n}^{(m)} \\ \ddot{a}_x^{(m)} &= \alpha(m) \ddot{a}_x - \beta(m) \end{aligned}$$

mit

$$\alpha(m) = \frac{d \cdot i}{d^{(m)} \cdot i^{(m)}} \qquad \beta(m) = \frac{i - i^{(m)}}{d^{(m)} \cdot i^{(m)}}$$

und  $d = \frac{i}{1+i}$ ,  $i^{(m)} = m \cdot ((1+i)^{1/m} - 1)$  und  $d^{(m)} = i^{(m)} / (1 + i^{(m)}/m)$  bzw. approximativ mit

	0.Ord.	1.Ord.	1,5-te Ord.	2.Ord.
$\alpha(m) =$	1			$+\frac{m^2-1}{12m^2}i^2 \quad \dots$
$\beta(m) =$	$\frac{m-1}{2m}$	$+\frac{m^2-1}{6m^2}i$	$\left[+\frac{1-m^2}{12 \cdot m^2} \cdot i^2\right]$	$+\frac{1-m^2}{24m^2}i^2 \quad \dots$

ergibt sich auch für allgemeine unterjährige Erlebenszahlungen  $\ddot{e}_t$  eine Rekursionsgleichung.

#### 5.4.1 Vorschüssige $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}}^{(m)}(t) &= \ddot{e}_t \cdot \ddot{a}_{x+t:\overline{1}}^{(m)} + v \cdot p_{x+t} \cdot A_{x:\overline{n}}^{(m)}(t+1) \\ &= \ddot{e}_t \cdot \{\alpha(m) - \beta(m) \cdot (1 - p_{x+t} \cdot v)\} + v \cdot p_{x+t} \cdot A_{x:\overline{n}}^{(m)}(t+1) \end{aligned}$$

### 5.4.2 Nachschüssige $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{m}|}^{(m)}(t) &= e_t \cdot a_{x+t:\overline{1}|}^{(m)} + v \cdot p_{x+t} \cdot A_{x:\overline{m}|}^{(m)}(t+1) \\ &= e_t \cdot \left\{ \alpha(m) - \left( \beta(m) + \frac{1}{m} \right) \cdot (1 - p_{x+t}v) \right\} + v \cdot p_{x+t} \cdot A_{x:\overline{m}|}^{(m)}(t+1) \end{aligned}$$

### 5.4.3 Allgemeine $m$ -tel jährliche Auszahlung der Erlebensleistungen

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{m}|}^{(m)}(t) &= \ddot{e}_t \cdot \{ \alpha(m) - \beta(m) \cdot (1 - p_{x+t} \cdot v) \} + \\ &\quad e_t \cdot \left\{ \alpha(m) - \left( \beta(m) + \frac{1}{m} \right) \cdot (1 - p_{x+t}v) \right\} + \\ &\quad v \cdot p_{x+t} \cdot A_{x:\overline{m}|}^{(m)}(t+1) \end{aligned}$$

## 5.5 Ablebensbarwert

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{m}|}(t) &= \sum_{j=t}^n j-t p_{x+t} \cdot q_{x+j} \cdot v^{j-t+1} \cdot a_j \\ &= q_{x+t} \cdot v \cdot a_t + p_{x+t} \cdot v \cdot A_{x:\overline{m}|}(t+1) \end{aligned}$$

prämienfreier Ablebensbarwert:

$$A_{x:\overline{m}|}^{(prf)}(t) = q_{x+t} \cdot v \cdot a_t^{(prf)} + p_{x+t} \cdot v \cdot A_{x:\overline{m}|}^{(prf)}(t+1)$$

Prämienrückgewähr

$$A_{x:\overline{m}|}^{(RG)}(t) = q_{x+t} \cdot v \cdot a_t^{(RG)} + p_{x+t} \cdot v \cdot A_{x:\overline{m}|}^{(RG)}(t+1)$$

## 5.6 Leistungsbarwert

$$BW_{x:\overline{m}|}^L(t) = E_{x:\overline{m}|}(t) + A_{x:\overline{m}|}(t) + (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{m}|}^{(RG)}(t) \cdot BP_{x:\overline{m}|}$$

## 5.7 Kostenbarwerte

Abschlusskostenbarwerte:

$$\begin{aligned} AK_{x:\overline{m}|}^{(VS)}(t) &= \alpha_t^{VS} + v \cdot p_{x+t} \cdot AK_{x:\overline{m}|}^{(VS)}(t+1) \\ AK_{x:\overline{m}|}^{(PS)}(t) &= \alpha_t^{PS} + v \cdot p_{x+t} \cdot AK_{x:\overline{m}|}^{(PS)}(t+1) \\ AK_{x:\overline{m}|}^{(BP)}(t) &= \alpha_t^{BP} + \alpha_{3a,t} + v \cdot p_{x+t} \cdot AK_{x:\overline{m}|}^{(BP)}(t+1) \end{aligned}$$

Zillmerkostenbarwerte:

$$\begin{aligned} ZK_{x:\overline{m}|}^{(VS)}(t) &= z_t^{VS} + v \cdot p_{x+t} \cdot ZK_{x:\overline{m}|}^{(VS)}(t+1) \\ ZK_{x:\overline{m}|}^{(PS)}(t) &= z_t^{PS} + v \cdot p_{x+t} \cdot ZK_{x:\overline{m}|}^{(PS)}(t+1) \end{aligned}$$

Inkassokostenbarwerte:

$$IK_{x:\overline{m}|}(t) = \beta_t^{BP} + v \cdot p_{x+t} \cdot IK_{x:\overline{m}|}(t+1)$$

Verwaltungskostenbarwerte:

$$\begin{aligned} VK_{x:\overline{m}|}^{(VS)}(t) &= \gamma_t^{VS} + v \cdot p_{x+t} \cdot VK_{x:\overline{m}|}^{(VS)}(t+1) \\ VK_{x:\overline{m}|}^{(PS)}(t) &= \gamma_t^{PS} + v \cdot p_{x+t} \cdot VK_{x:\overline{m}|}^{(PS)}(t+1) \\ VK_{x:\overline{m}|}^{frei}(t) &= \gamma_t^{VS, frei} + v \cdot p_{x+t} \cdot VK_{x:\overline{m}|}^{frei}(t+1) \end{aligned}$$

## 5.8 Darstellung der Barwerte in Vektor-/Matrixform

Die Leistungs- und Kostenbarwerte können (wie auch die Cashflows zu einem Zeitpunkt) in Matrixform dargestellt werden (aus Gründen der Übersichtlichkeit wird hier bei allen Termen der Subscript  $x:\overline{m}$  unterlassen):

$$\overrightarrow{BW}^L(t) = (P(t), \quad E^{Gar}(t), \quad E(t), \quad A(t), \quad A^{(RG)}(t)) \quad \overrightarrow{BW}^K(t) = \begin{pmatrix} AK^{(VS)}(t) & AK^{(PS)}(t) & AK^{(BP)}(t) \\ ZK^{(VS)}(t) & ZK^{(PS)}(t) & - \\ - & - & IK(t) \\ VK^{(VS)}(t) & VK^{(PS)}(t) & - \\ VK^{frei}(t) & - & - \end{pmatrix}$$

## 6 Prämien

### 6.1 Nettoprämie:

$$NP_{x:\overline{n}} = \frac{E_{x:\overline{n}}(0) + A_{x:\overline{n}}(0) + (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(0) \cdot BP_{x:\overline{n}}}{P_{x:\overline{n}}(0)} \cdot (1 + \rho)$$

### 6.2 Zillmerprämie (gezillmerte Nettoprämie):

$$ZP_{x:\overline{n}} = \frac{NP_{x:\overline{n}} \cdot P_{x:\overline{n}}(0) + ZK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + ZK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(0) \cdot BP_{x:\overline{n}} \cdot PS + ZK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(0) \cdot BP_{x:\overline{n}}}{P_{x:\overline{n}}(0)}$$

Varianten:

- )  $\beta$ - und  $\gamma$ -Kosten auch in die Zillmerprämie eingerechnet. Einziger Unterschied zur Bruttoprämie ist dann, dass nur die Zillmerkosten statt der  $\alpha$ -Kosten aufgeteilt werden.

$$ZP_{x:\overline{n}} = \left[ NP_{x:\overline{n}} \cdot P_{x:\overline{n}}(0) + \left( ZK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + IK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + VK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) \right) + \left( ZK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(0) + IK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(0) + VK_{x:\overline{n}}^{(PS)}(0) \right) \cdot BP_{x:\overline{n}} \cdot PS + \left( ZK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(0) + IK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(0) + VK_{x:\overline{n}}^{(BP)}(0) \right) \cdot BP_{x:\overline{n}} \right] / (P_{x:\overline{n}}(0))$$

- ) Prämienrückgewähr proportional zu Zillmerprämie (für Berechnung der Zillmerprämie):

$$ZP_{x:\overline{n}} = \frac{E_{x:\overline{n}}(0) + A_{x:\overline{n}}(0) + (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(0) \cdot ZP_{x:\overline{n}}}{P_{x:\overline{n}}(0)} \cdot (1 + \rho)$$

$$ZP_{x:\overline{n}} = \frac{E_{x:\overline{n}}(0) + A_{x:\overline{n}}(0) + ZP_{x:\overline{n}}}{P_{x:\overline{n}}(0) - (1 + \rho^{RG}) \cdot A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(0) \cdot (1 + \rho)} \cdot (1 + \rho)$$

### 6.3 Bruttoprämie:

$$BP_{x:\overline{n}} = \frac{(E_{x:\overline{n}}(0) + A_{x:\overline{n}}(0)) \cdot (1 + \rho) + \left( AK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + IK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) + VK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0) \right)}{P_{x:\overline{n}}(0) - A_{x:\overline{n}}^{(RG)}(1 + \rho^{RG})(1 + \rho) - AK_{x:\overline{n}}^{(BP)} - IK_{x:\overline{n}}^{(BP)} - VK_{x:\overline{n}}^{(BP)} - \left( AK_{x:\overline{n}}^{(PS)} + IK_{x:\overline{n}}^{(PS)} + VK_{x:\overline{n}}^{(PS)} \right) PS}$$

Wie man deutlich sehen kann, ist die Kostenursache ( $\alpha$ ,  $\beta$  oder  $\gamma$ ) für die Prämienbestimmung irrelevant. Es werden die Barwerte aller drei Kostenarten jeweils bei der entsprechenden Bemessungsgrundlage aufaddiert.

### 6.4 Ablebensleistung im Jahr $t$ :

$$Abl(t) = \left\{ a_t + a_t^{(RG)} \cdot BP_{x:\overline{n}} \right\} \cdot VS$$

### 6.5 Koeffizienten in Vektorschreibweise

Für die Berechnung der Prämien können die Koeffizienten der jeweiligen Barwerte auch mittels der Vektor-/Matrixschreibweise dargestellt werden (siehe Tabelle 6.5).

## 7 Zuschläge und Abschläge, Vorgeschriebene Prämie

$oUZu \dots$	Zuschlag für Vertrag ohne ärztliche Untersuchung
$SuRa = SuRa(VS) \dots$	Summenrabatt (von Höhe der VS abhängig)
$VwGew \dots$	Vorweggewinnbeteiligung in Form eines %-uellen Rabattes auf die Bruttoprämie
$StkK \dots$	Stückkosten pro Jahr (während Prämienzahlungsdauer, einmalig bei Einmalprämien)
$PrRa = PrRa(BP) \dots$	Prämienrabatt (von Höhe der Bruttoprämie abhängig)



$VwGew_{StkK} \dots$	Vorweggewinnbeteiligung in Form eines Rabattes auf die Prämie nach Zu-/Abschlägen (insbesondere nach Stückkosten)
$PartnerRa \dots$	Partnerrabatt auf Prämie nach Zu-/Abschlägen (z.B. bei Abschluss mehrerer Verträge), additiv zu $VwGew_{StkK}$
$uz(k) \dots$	Zuschlag für unterjährige Prämienzahlung ( $k$ mal pro Jahr)

$$uz(k) = \left\{ \begin{array}{ll} uk_1 & \text{für jährliche} \\ uk_2 & \text{für halbjährliche} \\ uk_4 & \text{für quartalsweise} \\ uk_{12} & \text{für monatliche} \end{array} \right\} \text{Prämienzahlung}$$

$VSt \dots$	Versicherungssteuer (in Österreich 4% oder 11%)
-------------	---

Vorgeschriebene Prämie:

$$PV_{x:\overline{n}} = \{(BP_{x:\overline{n}} + oUZu - SuRa) \cdot VS \cdot (1 - VwGew) + StkK\} \cdot (1 - PrRa - VwGew_{StkK} - PartnerRa) \cdot \frac{1 + uz(k)}{k} \cdot (1 + VSt)$$

## 8 Absolute Cash-Flows und Barwerte

TODO

	Leistungen				Kosten			
Terme	$(P_{x:\overline{m}}(t)$	$E_{x:\overline{m}}^{Gar}(t)$	$E_{x:\overline{m}}(t)$	$A_{x:\overline{m}}^{RG}(t)$	$)$	$\left( \begin{array}{l} AK_{x:\overline{m}}^{(VS)}(t) \\ ZK_{x:\overline{m}}^{(VS)}(t) \\ - \\ VK_{x:\overline{m}}^{(VS)}(t) \\ VK_{x:\overline{m}}^{frei}(t) \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} AK_{x:\overline{m}}^{(PS)}(t) \\ ZK_{x:\overline{m}}^{(PS)}(t) \\ - \\ VK_{x:\overline{m}}^{(PS)}(t) \\ - \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} AK_{x:\overline{m}}^{(BP)}(t) \\ - \\ IK_{x:\overline{m}}(t) \\ - \\ - \end{array} \right)$
Nettoprämie	Zähler	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 1+\rho \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 1+\rho \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} (1+\rho^{RG}) \cdot BP_{x:\overline{m}} \cdot (1+\rho) \\ 0 \end{array} \right)$		$\left( \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right)$	
	Nenner							
Zillmerprämie	Zähler	$\left( \begin{array}{l} 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 1+\rho \\ 1+\rho \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 1+\rho \\ 1+\rho \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} (1+\rho^{RG}) \cdot BP_{x:\overline{m}} \cdot (1+\rho) \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ [1] \\ [1] \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ BP_{x:\overline{m}} \cdot PS \\ [BP_{x:\overline{m}} \cdot PS] \\ [BP_{x:\overline{m}} \cdot PS] \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ BP_{x:\overline{m}} \\ [BP_{x:\overline{m}}] \\ [BP_{x:\overline{m}}] \\ 0 \end{array} \right)$
	Nenner	$\left( \begin{array}{l} 1 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right)$		$\left( \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right)$	
Bruttoprämie	Zähler	$\left( \begin{array}{l} 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 1+\rho \\ 1+\rho \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 1+\rho \\ 1+\rho \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -PS \\ 0 \\ -PS \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{array} \right)$
	Nenner	$\left( \begin{array}{l} 1 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} -(1+\rho) \cdot (1+\rho^{RG}) \\ 0 \end{array} \right)$		$\left( \begin{array}{l} -PS \\ -PS \\ -PS \\ 0 \end{array} \right)$	$\left( \begin{array}{l} -1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right)$

Tabelle 6: Koeffizienten der einzelnen Barwerte zur Berechnung der Prämien

## 9 Rückstellungen und Reserven

### 9.1 Deckungskapital / Reserve

#### 9.1.1 Nettodeckungskapital prämienpflichtig:

$$V_{x:\overline{n}}(t) = \{BW_{x:\overline{n}}^L(t) \cdot (1 + \rho) - NP_{x:\overline{n}} \cdot P_{x:\overline{n}}(t)\} \cdot VS$$

#### 9.1.2 Zillmerreserve prämienpflichtig:

TODO!

$$\begin{aligned} V_{x:\overline{n}}(t) &= \{BW_{x:\overline{n}}^L(t) \cdot (1 + \rho) - ZP_{x:\overline{n}} \cdot P_{x:\overline{n}}(t)\} \cdot VS = \\ &= \left\{ BW_{x:\overline{n}}^L(t) \cdot (1 + \rho) - NP_{x:\overline{n}} \cdot P_{x:\overline{n}}(t) - ZK_{x:\overline{n}}(0) \cdot BP_{x:\overline{n}}(t) \cdot \frac{P_{x:\overline{n}}(t)}{P_{x:\overline{n}}(0)} \right\} \cdot VS \end{aligned}$$

#### 9.1.3 Reserve prämienpflichtig:

Entspricht bei Zillmerung der Zillmerreserve

$$V_{x:\overline{n}}(t) = \{BW_{x:\overline{n}}^L(t) \cdot (1 + \rho) - ZP_{x:\overline{n}} \cdot P_{x:\overline{n}}(t)\} \cdot VS$$

#### 9.1.4 Bruttoreserve prämienpflichtig:

$$V_{x:\overline{n}}^{(b)}(t) = \{BW_{x:\overline{n}}^L(t) \cdot (1 + \rho) + -ZP_{x:\overline{n}} \cdot P_{x:\overline{n}}(t)\} \cdot VS$$

### 9.2 Verwaltungskostenreserve:

$$V_{x:\overline{n}}^{VwK}(t) = \left\{ VK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(t) - \left( \frac{VK_{x:\overline{n}}^{(VS)}(0)}{P_{x:\overline{n}}(0)} \right) \cdot P_{x:\overline{n}}(t) \right\} \cdot VS$$

### 9.3 Reserve prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}}^{frei}(t) = \left\{ (E_{x:\overline{n}}(t) + A1_{x:\overline{n}}(t)) \cdot \widetilde{VW} + TODO \cdot \min(f, m) \cdot BP_{x:\overline{n}}(x, n) \cdot VS \right\} \cdot (1 + \rho)$$

### 9.4 Verwaltungskostenreserve prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}}^{WvK, frei}(t) = VK4_{x:\overline{n}}(t) \cdot \widetilde{VS}$$

## 10 Spar- und Risikoprämie

$$P_{x:\overline{n}}(t) = SP_{x:\overline{n}}(t) + RP_{x:\overline{n}}(t)$$

### 10.1 Sparprämie

$$SP_{x:\overline{n}}(t) = V_{x:\overline{n}}(t+1) \cdot v - V_{x:\overline{n}}(t) + (\ddot{e}_t + v \cdot e_t) \cdot VS$$

### 10.2 Risikoprämie

$$RP_{x:\overline{n}}(t) = v \cdot q_{x+t} \cdot \{Abl(t) - V_{x:\overline{n}}(t+1)\}$$

## 11 Bilanzreserve

$BegDatum \dots$	Beginndatum des Vertrags
$BilDatum \dots$	Bilanzstichtag des Unternehmens
$baf \dots$	Bilanzabgrenzungsfaktor (Jahresanteil zwischen Abschlussdatum und Bilanzstichtag)
	-) 30/360: $baf = \frac{Monat(BilDatum+1) - Monat(BegDatum)+1}{12} \mod 1$
	-) Taggenau: $baf = \frac{BilDatum - BegDatum + 1}{TageImJahr(BilDatum)} \mod 1$
	-) etc.

### 11.1 prämienpflichtig

Bilanzreserve für Versicherungsleistungen:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{(L)}(t) = (1 - baf) \cdot V_{x:\overline{m}}(t) + baf \cdot V_{x:\overline{m}}(t+1)$$

Verwaltungskosten-Bilanzreserve:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{(VwK)}(t) = (1 - baf) \cdot V_{x:\overline{m}}^{(VwK)}(t) + baf \cdot V_{x:\overline{m}}^{(VwK)}(t+1)$$

Gesamte Bilanzreserve:

$$BilRes_{x:\overline{m}}(t) = BilRes_{x:\overline{m}}^{(L)}(t) + BilRes_{x:\overline{m}}^{(VwK)}(t)$$

### 11.2 prämienfrei

Bilanzreserve für Versicherungsleistungen, prämienfrei:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{(L),frei}(t) = (1 - baf) \cdot V_{x:\overline{m}}^{frei}(t) + baf \cdot V_{x:\overline{m}}^{frei}(t+1)$$

Verwaltungskosten-Bilanzreserve, prämienfrei:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{(VwK),frei}(t) = (1 - baf) \cdot V_{x:\overline{m}}^{VwK,frei}(t) + baf \cdot V_{x:\overline{m}}^{VwK,frei}(t+1)$$

Gesamte Bilanzreserve, prämienfrei:

$$BilRes_{x:\overline{m}}^{frei}(t) = BilRes_{x:\overline{m}}^{(L),frei}(t) + BilRes_{x:\overline{m}}^{(VwK),frei}(t)$$

## 12 Prämienfreistellung und Rückkauf

Verteilung der  $\alpha$ -Kosten auf  $r$  Jahre für den Rückkauf bzw. die Vertragskonversion ist nicht bei allen Tarifen oder in allen Jurisdiktionen vorgesehen. =<sub>i</sub> FLAG

### 12.1 Umrechnungsreserve

Sowohl Prämienfreistellung als auch Rückkauf starten von der Umrechnungsreserve, die sich aus der Zillmerreserve, den Kostenrückstellungen sowie der Verteilung der  $\alpha$ -Kosten auf 5 Jahre ergibt:

$$V_{x:\overline{n}|}^{Umr} = (V_{x:\overline{n}|}(t) + V_{x:\overline{n}|}^{VwK}(t) + AbsKErh(t)) \cdot (1 - VwGew(TODO))$$

wobei  $AbsKErh(t)$  die anteilmäßige Rückzahlung der Abschlusskosten bei Rückkauf innerhalb der ersten  $n(=5)$  Jahre gemäß §176 öVersVG bezeichnet:

$$AbsKErh(t) = \max \left( \sum_{j=0}^t Zillm(j) - \frac{t}{5} \sum_{j=0}^n Zillm(j), 0 \right) \quad (\text{Abschlusskostenerhöhungsbetrag})$$

$$Zillm(t) = z_t^{(VS)} + z_t^{(BP)} \cdot BP_{x:\overline{n}|} + z_t^{(PS)} \cdot BP_{x:\overline{n}|} \cdot \sum_{j=0}^n pr_j \quad (\text{Zillmerprämienanteil/-cashflow im Jahr } j)$$

Varianten:

- ) Verteilung auf 5 Jahre nicht linear ( $t/5$ ), sondern als 5-jährige Leibrente bewertet, deren Rest noch ausständig ist.

$$AbsKErh(t) = \max \left( \sum_{j=0}^t Zillm(j) - \left( 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t:r-\overline{t}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} \right) \frac{t}{5} \sum_{j=0}^n Zillm(j), 0 \right)$$

- ) Bei zahlreichen Tarifen wird die Abschlusskostenerhöhung erst NACH dem Rückkaufsabschlag addiert, sodass diese Erhöhung nicht vom Abschlag betroffen ist =<sub>i</sub> FLAG

### 12.2 Rückkaufswert (prämienpflichtig)

Zahlreiche Tarife sind NICHT rückkaufsfähig =<sub>i</sub> FLAG

$$Rkf(t) = f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots)$$

Die Abschläge von der Umrechnungsreserve auf den Rückkaufswert sind im Allgemeinen nicht standardisiert, sondern variieren je nach Versicherungsunternehmen stark. Mögliche Abschläge sind:

#### Prozentualer Rückkaufsabschlag

Prozentualer Abschlag auf die Umrechnungsreserve, z.B. 2% oder 5%:  $RkfFakt = 0.95$

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = RkfFakt \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr} \quad \text{mit } RkfFakt = 0.98 \text{ oder } 0.95$$

#### Lineare Erhöhung des prozentualen Rückkaufsabschlags

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = RkfFakt(t) \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr}$$

$$RkfFakt(t) = \min(k_1 + t \cdot \delta k; k_2) \quad \text{mit z.B. } k_1 = 0.9, \delta k = 0.005 \text{ und } k_2 = 0.98$$

Alternativ:

$$RkfFakt(t) = \begin{cases} 0.95 & 1 \leq t \leq 3 \\ 0.95 + 0.003 \cdot (t - 3) & 3 < t \leq 13 \\ 0.98 & 13 < t \end{cases}$$

#### Prozentualer Abschlag mit Mindestabschlag

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = \min(0.95 \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, Abl(t), V_{x:\overline{n}|}^{Umr} - 0.15 \cdot BP_{x:\overline{n}|} \cdot VS \cdot (1 - VwGew))$$

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = \min(0.95 \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, Abl(t))$$

## Prozentualer Abschlag mit Mindestabschlag (Mindesttodesfallsumme als Grenze)

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = \min(0.95 \cdot V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, MTS(m, t))$$

$$MTS(m, t) = \dots$$

## Abschlag proportional zum Deckungskapital

$$f(V_{x:\overline{n}|}^{Umr}, \dots) = V_{x:\overline{n}|}^{Umr} \cdot \left( s_f + \max(0.97 - s_f, 0) \cdot \frac{V_{x:\overline{n}|}^{Umr}}{VS} \right)$$

$$s_f = \begin{cases} 0.92 & \text{für } t < \max(10, n - 5) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

TODO: Weitere mögliche Rückkaufsabschläge rausfinden

## 12.3 Stornogebühr bei Rückkauf

Manche Tarife sehen eine fixe Stornogebühr bei Rückkauf (z.B. nur in den ersten 24 Monaten) vor:

$$StoGeb = \min \left( \max \left( 0.15 \cdot PV(x, n) \cdot \frac{pz}{1 - uz(pz)} \cdot \frac{1}{1 + VS_t}, 30 \right), 300 \right)$$

Ansonsten:  $StoGeb = 0$ .

## 12.4 Prämienfreistellung

Der Vertrag wird zum Zeitpunkt  $f$  prämienfrei gestellt, d.h. ab  $f$  wird keine Prämie mehr bezahlt, die Höhe des Versicherungsschutzes bestimmt sich aus dem zu  $f$  vorhandenen Deckungskapital und den Kostenreserven (Umrechnungsreserve). Bei Prämienrückgewähr wird nur die tatsächlich bezahlte Prämiensumme rückgewährt.

Aus

$$V_{x:\overline{n}|}^{Umr}(f) - StoGeb = \underbrace{BW_{x:\overline{n}|}^L(f) \cdot (1 + \rho) \cdot \widetilde{VS} + BW_{x:\overline{n}|}^{RG, frei}(f) \cdot (1 + \rho) \cdot BP_{x:\overline{n}|} \cdot VS}_{=V_{x:\overline{n}|}^{frei}(f)} + \underbrace{VK_{x:\overline{n}|}^{frei}(f)}_{=V_{x:\overline{n}|}^{VwK, frei}(f)}$$

mit

$$BW_{x:\overline{n}|}^{RG, frei}(f) = A_{x:\overline{n}|}^{(RG)}(t) \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{f-1} pr_j}_{=\min(f, m) \text{ bei lfd. konst. Prämie}} \quad (\text{BW zukünftiger Prämienrückgewähr})$$

ergibt sich die neue Versicherungssumme  $\widetilde{VS}(f)$  nach Prämienfreistellung zum Zeitpunkt  $f$ :

$$\widetilde{VS}(f) = \frac{V_{x:\overline{n}|}^{Umr}(f) - BW_{x:\overline{n}|}^{RG, frei}(f) \cdot (1 + \rho) \cdot BP_{x:\overline{n}|} \cdot VS - StoGeb}{BW_{x:\overline{n}|}^L(f) \cdot (1 + \rho) + VK_{x:\overline{n}|}^{frei}(f)}$$

## 12.5 Reserven nach außerplanmäßiger Prämienfreistellung

Nettodeckungskapital außerplanmäßig Prämienfrei zu  $f$

$$V_{x:\overline{n}|}^{(n), prf, f}(t) = \left\{ BW_{x:\overline{n}|}^L, prf(t) \cdot (1 + \rho) \right\} \cdot \widetilde{VS}(f)$$

### 12.5.1 Reserve außerplanmäßig prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}|}^{prf, f}(t) = \left\{ BW_{x:\overline{n}|}^L, pr(t) \cdot (1 + \rho) + BW_{x:\overline{n}|}^{RG, frei, f}(t) \right\} \cdot \widetilde{VS}(f)$$

## 12.6 Verwaltungskostenreserve außerplanmäßig prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}}^{VwK,prf,f}(t) = \left\{ VK_{x:\overline{n}}^{(VS),prf.}(t) + VK_{x:\overline{n}}^{(PS),prf.}(t) \cdot PS(f) \right\} \cdot \widetilde{VS}(f)$$

TOCHECK:

## 12.7 Reserve prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}}^{frei}(t) = \left\{ (E_{x:\overline{n}}(t) + A1_{x:\overline{n}}(t)) \cdot \widetilde{VW} + TODO \cdot \min(f, m) \cdot BP_{x:\overline{n}}(x, n) \cdot VS \right\} \cdot (1 + \rho)$$

## 12.8 Verwaltungskostenreserve prämienfrei:

$$V_{x:\overline{n}}^{WvK,frei}(t) = VK4_{x:\overline{n}}(t) \cdot \widetilde{VS}$$

## 12.9 Umrechnungsreserve außerplanmäßig prämienfrei

$$V_{x:\overline{n}}^{Umr,prf,f}(t) = \left( V_{x:\overline{n}}^{prf,f}(t) + V_{x:\overline{n}}^{VwK,prf,f}(t) \right) \cdot (1 - VwGew.TODO)$$